BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ САССА

А.Н.МАМЕДОВА

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

fidan200409@rambler.ru

Доказаны теоремы о приближении и о порядке приближения многократно-дифференцируемых функций последовательностью обобщенных операторов типа Сасса. Порядок приближения оценивается в весовой норме с помощью модуля непрерывности производной наибольшего порядка приближаемой функции. Приводится также асимптотическая формула о приближении в фиксированной точке.

Пусть r фиксированное натуральное число и $C^r[0,\infty)$ пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций на полуоси $[0,\infty)$. Для $f \in C^r[0,\infty)$ рассматривается обобщенный оператор Сасса:

$$S_{n,r}(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^i\frac{(nx)^k}{k!}. \tag{1}$$

Для $r=0$ этот оператор совпадает с классическим оператором Сасса:

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}. \tag{2}$$

Отметим, что такое обобщение для классического полинома Бернштейна получено в $[6]$.

Для натурального m через $B_{2m}[0,\infty)$ обозначим пространства функций удовлетворяющие неравенству

$$|f(x)| \le M_f(1+x^{2m}), \quad x \ge 0,$$

где M_f постоянная зависящая только от функции f. Предположим, что $C_{2m}[0,\infty)$ пространства всех непрерывных функций принадлежащих $B_{2m}[0,\infty)$. Далее, пусть $C_{2m}^0[0,\infty)$ подмножества функций из $C_{2m}[0,\infty)$, для которых $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{1+x^{2m}} = A < \infty$.

Следующая теорема является известной.

Теорема 1 $([4])$**.** Пусть $f \in C_{2m}^0[0,\infty)$ и $S_n(f;x)$ - классический оператор

Сасса. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le b_n}\frac{\left|S_n(f;x)-f(x)\right|}{1+x^{2m}}=0.$$

Лемма 1 $([5])$**.** Пусть $r=0,1,2,\dots$, $x\ge 0$

$$T_{n,r}(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^r\frac{(nx)^k}{k!}. \tag{3}$$

Тогда

$$T_{n,r+1}(x)=\frac{x}{n}\left[T^{/}_{n,r}(x)+rT_{n,r-1}(x)\right]. \tag{4}$$

Лемма 2. Для $T_{n,r}(x)$, определенных в (3) справедливо равенство

$$T_{n,r}(x)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}p_{r,i}x^in^{i-r}\quad,\quad r\ge 2, \tag{5}$$

где $p_{r,i}$ - положительные коэффициенты, не зависящие от n.

Доказательство. Непосредственно из (3) видно, что (5) справедливо для $r=2,3$. Пусть (5) справедливо для $r\le 2k+1$.Тогда, по индукции и в силу (4), получаем:

$$T_{n,2k+2}(x)=\frac{x}{n}\left[T^{/}_{n,2k+1}(x)+(2k+1)T_{n,2k}(x)\right]=\frac{x}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}p_{2k+1,i}ix^{i-1}n^{i-(2k+1)}+(2k+1)\sum_{i=1}^{k}p_{2k,i}x^in^{i-2k}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}p_{2k+1,i}ix^in^{i-(2k+2)}+(2k+1)\sum_{i=1}^{k}p_{2k,i}x^{i+1}n^{i-(2k+1)}.$$

Значит (5) справедливо для $r=2k+2$**.**

Более того, из равенства

$$T_{n,2k+3}(x)=\frac{x}{n}\left[T^{/}_{n,2k+2}(x)+(2k+2)T_{n,2k+1}(x)\right]=$$

$$=\frac{x}{n}\left[\sum_{i=1}^{k+1}p_{2k+2,i}ix^{i-1}n^{i-(2k+2)}+(2k+2)\sum_{i=1}^{k}p_{2k+1,i}x^in^{i-(2k+1)}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}p_{2k+2,i}ix^in^{i-(2k+3)}+(2k+2)\sum_{i=2}^{k+1}p_{2k+1,i-1}x^in^{i-(2k+3)},$$

видно, что (5) справедливо и для $r=2k+3$ и $r\ge 2$**.** Лемма доказана.

Следствие. Имеет место неравенство

$$T_{n,r}(x)\le C(r)\frac{\left(x+x^2+\dots+x^{\left[\frac{r}{2}\right]}\right)}{n^{r-\left[\frac{r}{2}\right]}}. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть $f\in C^r[0,\infty)$ и производная $f^{(r)}(x)$ имеет конечный предел на бесконечности. Тогда для обобщенного оператора Сасса $S_{n,r}(f;x)$ справедливо неравенство

$$\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|}{1+x^{r+2}}\le K(r)n^{-r/2}\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right),$$

где $K(r)$-постоянная, зависящая от r, а ω модуль непрерывности производной $f^{(r)}$.

Доказательство. Используя модифицированную формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^i+\frac{1}{(r-1)!}\int_{\frac{k}{n}}^{x}f^{(r)}(y)(x-y)^{r-1}dy.$$

Вводя обозначения

$$y=\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right),\qquad dy=\left(x-\frac{k}{n}\right)dt,$$

$$x-y=x-\left(\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)=\left(x-\frac{k}{n}\right)(1-t),$$

можем написать следующее представление:

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_{\frac{k}{n}}^{x}f^{(r)}(y)(x-y)^{r-1}dy=\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^r}{(r-1)!}\int_0^1 f^{(r)}\left(\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)(1-t)^{r-1}dt.$$

Тогда

$$f(x)=\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^i+\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^r}{(r-1)!}\int_0^1 f^{(r)}\left(\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)(1-t)^{r-1}dt-$$

$$-\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^r}{(r-1)!}f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right)\int_0^1(1-t)^{r-1}dt.$$

В силу этого,

$$\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|\le$$

$$\le e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|x-\frac{k}{n}\right|^r}{(r-1)!}\int_0^1\left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)-f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right)\right|(1-t)^{r-1}dt\,\frac{(nx)^k}{k!}.$$

Так как для любого положительного λ $\omega\left(f;\lambda n^{-1/2}\right)\le(\lambda+1)\omega\left(f;n^{-1/2}\right)$, то

$$\omega\left(f^{(r)};t\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\le\left(\frac{t\left|\frac{k}{n}-x\right|}{n^{-1/2}}+1\right)\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right),$$

и поэтому

$$\left|\ f^{(r)}\left(\frac{k}{n}+t\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)-f^{(r)}\left(\frac{k}{n}\right)\ \right|\le\left(\frac{t\left|\frac{k}{n}-x\right|}{n^{-1/2}}+1\right)\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right). \qquad (7)$$

В силу неравенства (7) получаем:

$$\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|\le\ \omega\left(n^{-1/2}\right).$$

$$\cdot\ e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{\left|x-\frac{k}{n}\right|^{r}}{(r-1)!}\int_0^1\ (1-t)^{r-1}\left(\frac{t\left|\frac{k}{n}-x\right|}{n^{-1/2}}+1\right)dt\,\frac{(nx)^k}{k!},$$

и значит

$$\left|f(x)-S_{n,r}(f;x)\right|\le\omega\left(n^{-1/2}\right)\ e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{\left|x-\frac{k}{n}\right|^{r+1}}{(r-1)!}\frac{1}{r(r+1)}\ \frac{1}{n^{-1/2}}\frac{(nx)^k}{k!}+$$

$$+\omega\left(n^{-1/2}\right)\ e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{\left|x-\frac{k}{n}\right|^{r}}{(r-1)!}\,\frac{1}{r}\ \frac{(nx)^k}{k!}.$$

Отсюда получаем оценку:

$$\left|f(x)-S_{n,r}(f;x)\right|\le\omega\left(n^{-1/2}\right)\ e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\le n^{-1/2}}n^{-r/2}\left(\ \frac{1}{(r+1)!}+\frac{1}{r!}\ \right)\frac{(nx)^k}{k!}+$$

$$+\omega\left(n^{-1/2}\right)\ e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>n^{-1/2}}^{\infty}\left|x-\frac{k}{n}\right|^{r+2}\frac{1}{n^{\left(-1/2\right)^2}}\left(\ \frac{1}{(r+1)!}+\frac{1}{r!}\ \right)\frac{(nx)^k}{k!}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|f(x)-S_{n,r}(f;x)\right|\le 2n^{-r/2}\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right)+2n\ \omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right).$$

$$\cdot\left(e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\ \left(x-\frac{k}{n}\right)^{2(r+2)}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{1/2}\quad=2\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right)\left(n^{-r/2}+n\sqrt{T_{2(r+2)}(x)}\right)$$

Из (6) получаем:

$$T_{2(r+2)}(x) \le \frac{C_1(r)\left(x + x^2 + \ldots + x^{r+2}\right)}{n^{r+2}},$$

$$\sqrt{T_{2(r+2)}(x)} \le \frac{C(r)(1+x)^{\frac{r}{2}+1}}{n^{\frac{r+2}{2}}}. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\left|f(x) - S_{n,r}(f;x)\right| \le C(r) n^{-r/2} \omega\left(f^{(r)}; n^{-1/2}\right)(1+x)^{\frac{r}{2}+1}$$

и теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $f \in C^{r+2}[0,\infty)$ и все её производные являются ограниченными функциими. Тогда для обобщенного оператора Сасса $S_{n,r}(f;x)$ справедливо асимптотическое равенство

$$S_{n,r}(f;x) = f(x) + \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x) T_{r+1}(x)}{(r+1)!} + \frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x) T_{r+2}(x)}{(r+2)!} + \frac{\rho_{n,r}(x)}{n^{r/4}},$$

где функции $T_{r+1}(x)$ и $T_{r+2}(x)$ определены в (3) и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{n,r} = 0$.

Доказательство. Так как $f \in C^{r+2}[0,\infty)$, то $f^{(i)} \in C^{r-i+2}[0,\infty)$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в виде Пеано, получим:

$$f^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{r-i+2} \frac{f^{(i+s)}(x)}{s!}(t-x)^s + \alpha_i((t-x))(t-x)^{r-i+2}, \quad t = \frac{k}{n}, \tag{9}$$

где

$$\lim_{q\to 0} \alpha_i(q) = 0, \quad \alpha_i(0) = 0,$$

из условий теоремы и (9) видно, что $\alpha_i(q) \cdot q^{r-i+2}$ являются непрерывными функциями.

Из (1) и (9) получаем:

$$S_{n,r}(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{r+2} \Bigg[\sum_{s=0}^{r-i+2} \frac{f^{(i+s)}(x)}{s!}\left(\frac{k}{n} - x\right)^s +$$

$$\alpha_i\left(\left(\frac{k}{n} - x\right)\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^{r-i+2} \frac{1}{i!}\left(x - \frac{k}{n}\right)^i \frac{(nx)^k}{k!} \tag{10}$$

Полагая

$$J = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{r+2} \sum_{s=0}^{r-i+2} \frac{f^{(i+s)}(x)}{s!}\left(\frac{k}{n} - x\right)^s \frac{1}{i!}\left(x - \frac{k}{n}\right)^i \frac{(nx)^k}{k!},$$

$$R_{n,r}(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{r+2} \alpha_i\left(\left(\frac{k}{n} - x\right)\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^{r-i+2} \frac{1}{i!}\left(x - \frac{k}{n}\right)^i \frac{(nx)^k}{k!}$$

напишем равенство (10) в виде:

$$S_{n,r}(f;x) = J + R_{n,r}(x).$$

Обозначим $i+s=p$, тогда $s=p-i$. Имеем

$$J=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\sum_{p=i}^{r+2}(-1)^{i}\frac{f^{(p)}(x)}{i!(p-i)!}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{p}\frac{(nx)^{k}}{k!}.$$

Из (3) получаем

$$J=\sum_{i=0}^{r}\sum_{p=i}^{r+2}\frac{f^{(p)}(x)}{i!(p-i)!}(-1)^{i}T_{n,p}(x). \qquad (11)$$

Преобразуем первую сумму в (11):

$$J=\sum_{p=0}^{r+2}\frac{f^{(p)}(x)}{0!(p-0)!}(-1)^{0}S_{p}(x)+\sum_{p=1}^{r+2}\frac{f^{(p)}(x)}{1!(p-1)!}(-1)^{1}S_{p}(x)+\ldots+\sum_{p=r}^{r+2}\frac{f^{(p)}(x)}{r!(p-r)!}(-1)^{r}S_{p}(x).$$

$$\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}S_{r+1}(x)\left[(-1)^{0}+(-1)^{1}(r+1)+\ldots+(-1)^{r}(r+1)\right]=\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}S_{r+1}(x)\sum_{k=0}^{r}C_{r+1}^{k}(-1)^{k}, \qquad (12)$$

$$\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}S_{r+2}(x)\left[(-1)^{0}+(-1)^{1}(r+2)+\ldots+(-1)^{r}\frac{(r+1)(r+2)}{2!}\right]=\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}S_{r+2}(x)\sum_{k=0}^{r}C_{r+2}^{k}(-1)^{k} \qquad (13)$$

Учитывая (12) и (13) в равенстве (11),получим:

$$J=f(x)+\sum_{p=1}^{r}\frac{f^{(p)}(x)}{p!}S_{p}(x)\sum_{k=0}^{p}C_{p}^{k}(-1)^{k}+\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}S_{r+1}(x)\sum_{k=0}^{r}C_{r+1}^{k}(-1)^{k}+$$
$$+\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}S_{r+2}(x)\sum_{k=0}^{r}C_{r+2}^{k}(-1)^{k}.$$

Отсюда в силу следующих элементарных тождеств:

$$\sum_{k=0}^{p}C_{p}^{k}(-1)^{k}=(1-1)^{p}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{r}C_{r+1}^{k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{r+1}C_{r+1}^{k}(-1)^{k}-C_{r+1}^{r+1}(-1)^{r+1}=(-1)^{r},$$

$$\sum_{k=0}^{r}C_{r+2}^{k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{r+2}C_{r+2}^{k}(-1)^{k}-\left[C_{r+2}^{r+2}(-1)^{r+2}+C_{r+2}^{r+1}(-1)^{r+1}\right]=(-1)^{r}(r+1),$$

получаем:

$$J=f(x)+(-1)^{r}\frac{f^{(r+1)}(x)}{(r+1)!}S_{r+1}(x)+(-1)^{r}(r+1)\frac{f^{(r+2)}(x)}{(r+2)!}S_{r+2}(x).$$

Теперь оценим $R_{n,r}(x)$. Имеем:

$$R_{n,r}(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\alpha_{i}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r-i+2}\frac{1}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{i}\frac{(nx)^{k}}{k!}=$$
$$=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\alpha_{i}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}(-1)^{i}\frac{1}{i!}\frac{(nx)^{k}}{k!}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ - произвольное число. Так как

$$\lim_{q\to 0}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}\left|\alpha_i(q)\right| = 0,$$

то для достаточно малого q , имеет место неравенство:

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}\left|\alpha_i(q)\right| < \frac{\varepsilon}{C_1(r)}, \tag{14}$$

где $C_1(r)$ - положительное постоянное. Так как $f, f', f'',..., f^{(r+2)}$ ограниченные функции, то

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n}-x\right) + \frac{f''(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(r+2)}(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}}{(r+2)!} + \alpha_i\left(\frac{k}{n}-x\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2},$$

$$\left| \alpha_i\left(\frac{k}{n}-x\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2} \right| \le C(r)\left(1+\left|\frac{k}{n}-x\right|+\left|\frac{k}{n}-x\right|^2+\ldots+\left|\frac{k}{n}-x\right|^{r+2}\right). \tag{15}$$

Для достаточно большого целого n , имеем

$$C_2(r)\cdot n^{-1/2} < \varepsilon \tag{16}$$

Из (8) (14), (15) и (16) получаем:

$$\left|R_{n,r}(x)\right| \le \left| e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\sum_{i=0}^{r}\alpha_i\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}\frac{1}{i!}(-1)^i\frac{(nx)^k}{k!}\right| +$$

$$+\left| e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}\sum_{i=0}^{r}\alpha_i\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}\frac{1}{i!}(-1)^i\frac{(nx)^k}{k!}\right| =$$

$$= e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\frac{\varepsilon}{C_1(r)}\left|\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}\right|\frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}C_2(r)\left|\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r+2}}{\delta^{r+2}}\left(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{r+2}\right)\right|\frac{(nx)^k}{k!} =$$

$$= \left|R_{n,r}(x)\right| \le \frac{\varepsilon C_1\left(1+x^{r+2}\right)}{n^{\frac{r+2}{2}}} + \frac{\varepsilon C_2\left(1+x^{r+2}\right)}{n^{\frac{r}{4}}} \le \frac{\varepsilon C\left(1+x^{r+2}\right)}{n^{\frac{r}{4}}}$$

Тогда имеем:

$$\left|\rho_{n,r}(x)\right| = \frac{n^{r/4}\left|R_{n,r}(x)\right|}{\left(1+x^{r+2}\right)} < \varepsilon\,.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aral A. A Generalization of Szasz operators based on q-integers // Matem. and Comp. Model., 2008, 47, 1052.

2. Duman O. and Ozarslan M.A. Szasz type operators providing a better error estimation // Appl. Math. Lett., 2007, 20, 1184.
3. Gadjiev A.D. and Ispir N. On a sequence of linear positive operators in weighted spaces // Proceeding of IMM of Azerbaijan AS.Math. and Mech., 1999, 11, 45.
4. Gadjiev A.D. and Cigdem A. On approximation of unbounded functions by the generalized Baskakov operators // Transactions of NAS Azerbaijan. Math. and Mech., 2003, **23,** 33.
5. Becker M. Global approximation theorems for Szasz and Baskakov operators in polynomial weight spaces// Indiana University Math.Journal, 1978, 27, 127.
6. Kirov G.H. A generalization of the Bernstein polynomials // Mathematica Balkanica, 1992, 6, 147.
7. Rempulska L. and Walczak Z. Approximation by some operators of Szasz type // Anal. in Theory and Appl., 2004, 20, 1.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SAS OPERATORU ÜÇÜN YAXINLAŞMA TEOREMLƏRİ

A.N.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə ümumiləşmiş Sas operatorları ardıcıllıqları ilə coxqat diferensiallanan funksiyaların yaxınlaşması və yaxınlaşma tərtibi haqqında teoremlər isbat edilmişdir. Yaxınlaşdırılan funksiyanın ən böyük tərtib törəməsinin kəsilməzlik modulunun köməyilə çəkili normada yaxınlaşma tərtibi qiymətləndirilir. Həmcinin qeyd olunmuş nöqtədə yaxınlaşma üçün asimptotik düstur verilir.

APPROXİMATİON THEOREMS FOR GENERALİZED SZASZ OPERATORS

A.N.MAMMADOVA

SUMMARY

The theorems on the approximation and on the order of approximation of multi-differentiable functions by the sequence of generalized Szasz operators are proved. The order of approximation is estimated by the modulus of continuity of higher derivatives of functions.

The asymptotical formula on approximation in the fixed point is also reduced.